

# Tvíhliða dreifigreining

Fyrirlestur í Tölfræði III (SÁL308G)

# Dæmi um marghliða dreifigreiningu

Taflan sýnir meðaleinkunnir eftir þrjú misseri í háskóla eftir aðalgrein fyrir nemendur sem voru í tölvufræði á fyrsta misseri.

Hér eru niðurstöður ekki brotnar niður eftir einni frumbreytu heldur samtímis fyrir tvær. Gögnin henta fyrir tvíhliða dreifigreiningu.

Hún hefur ákveðna kosti umfram einhliða dreifigreiningu: Þátttakendur geta verið færri, mat á villunni verður lægra og hægt að skoða samvirkni.

Aðalgrein	Kynferði		Heild
	Karlar	Konur	
Tölvufræði	2,7 (0,68)	3,0 (0,53)	2,9 (0,62)
Verkfræði	3,1 (0,51)	3,1 (0,65)	3,1 (0,58)
Annað	2,0 (0,73)	2,5 (0,77)	2,3 (0,78)
Heild	2,6 (0,78)	2,9 (0,69)	2,7 (0,75)

Staðalfrávik eru innan sviga.  $n= 39$  í hverju hólfni sniðsins.

Við köllum þetta „krossaða“ töflu.

# Fjöldi þátttakenda

Tvíhliða dreifigreining prófar báðar frumbreytur í sömu úrvinnslu. Áhrif kynferðis er prófað í tveimur 117 manna hópum og áhrif aðalgreinar í þremur 78 manna hópum.

Í einhliða dreifigreiningu þyrfti tvö 234 manna úrtök til að prófa báðar frumbreytur. Með því að krossa breyturnar í einni og sömu rannsóknin getum við prófað áhrif beggja breyta með helmingi færri þátttakendum og því minni tilkostnaði en ef breyturnar væru ekki krossaðar.

Aðalgrein	Kynferði		Heild
	Karlar	Konur	
Tölvufræði	39	39	78
Verkfræði	39	39	78
Annað	39	39	78
Heild	117	117	234

Ef við gerðum eina rannsókn fyrir hvora frumbreytu, væri hvor rannsókn um helmingi minni en í krossaða sniðinu. Nákvæmni mats á þýðismeðaltölum myndi þá minnka um 30% þar sem staðalvillan er  $\sigma/\sqrt{n}$ .

# Lægra mat á villunni

Leifin er mat okkar á villunni. Matið ræðst af því hvort öllum mikilvægum breytum er haldið inni í líkaninu.

Ef Aðalgrein hefur umtalsverð áhrif á einkunn, er villan ofmetið ef aðeins Kynferði er inni í líkaninu.

Myndin sýnir að í einhliða greiningu er leifin 98% af heildardreifingunni. Ef Aðalgrein er tekin inn í myndina, ræðst um 21% dreifingarinnar af henni. Villan er því mun minni en við höldum þar sem leifin er aðeins 77% af heildardreifingunni.

Hrif	Summa kvaðrata	df	Meðalsumma kvaðrata	F	p
Kynferði	3,1	1	3,11	5,7	0,018
Leif	126,2	232	0,54		
Heild	129,3	233			

Hrif	Summa kvaðrata	df	Meðalsumma kvaðrata	F	p
Kynferði	3,1	1	3,11	7,2	0,008
Aðalgrein	26,8	2	13,38	30,9	0,000
Leif	99,5	230	0,43		
Heild	129,3	233			

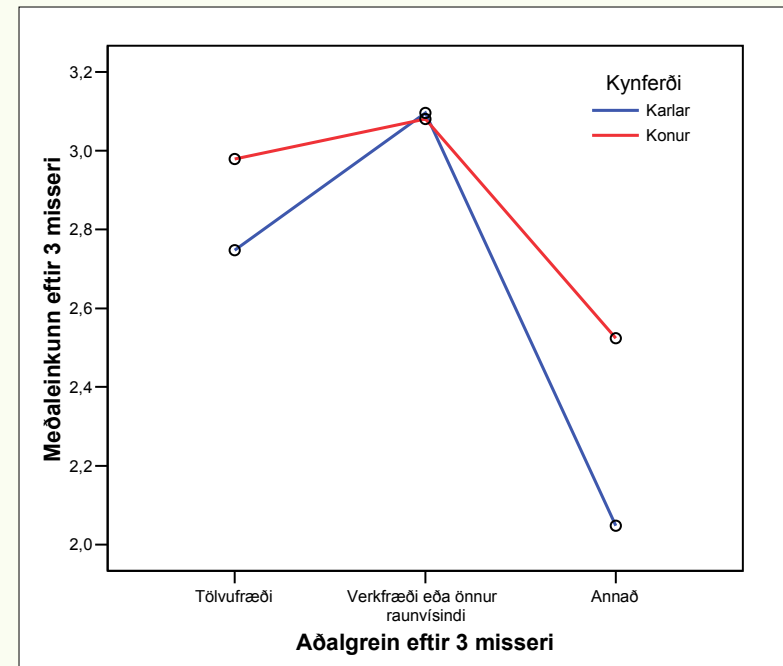
Þegar frumbreytum fjölgar, minnkar summa kvaðrata fyrir leifina. Frígráðum leifarinnar fækkar hins vegar einnig og því ekki víst að mat okkar á villunni minnki. Því þarf alltaf að ígrunda hvaða frumbreytur fari inn í líkanið.

# Samvirkni (*interaction*)

Myndin sýnir að einkunnir eru ólíkar eftir aðalgrein og að konur hafa að jafnaði hærri einkunn en karlar.

Áhrif Aðalgreinar eru misjöfn eftir kynferði og því segjum við að það sé samvirkni milli Aðalgreinar og Kynferðis.

Samvirkni eru hrif sem við getum aðeins metið í tvíhliða eða marghliða dreifigreiningu. Hún er því enn ein röksemdin fyrir því að nota tvíhliða dreifigreiningu í stað einhliða.



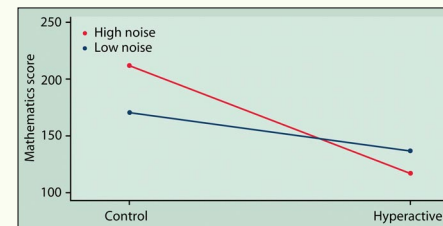
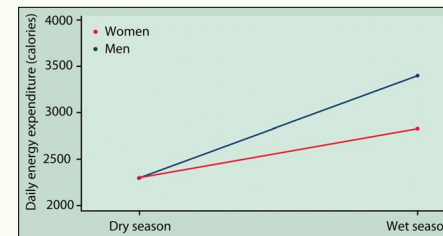
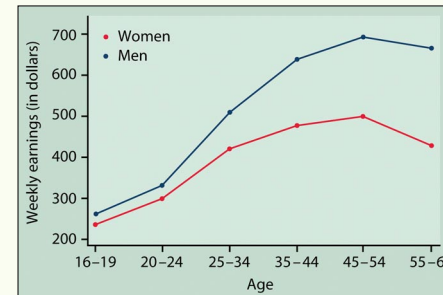
# Dæmi um samvirkni

Samvirkni er til staðar þegar línur línuritanna eru ekki samsíða.

Efsti reitur sýnir ólík kynjahrif eftir aldri en karlar eru alltaf hærri. Hér væri réttmætt en villandi að segja karla að meðaltali hærri en konur.

Miðreitur sýnir karla hærri á regntíma en kynin jöfn á þurrkatíma. Hér væri afar villandi að tala um kynjahrif.

Í neðsta reit er rannsóknarhópur ýmist betri eða verri en hins hópsins eftir hávaðastigi. Hér væri beinlínis rangt að túlka hópamuninn án þess að tilgreina við hvaða hávaða er miðað.



# Líkan tvíhliða dreifigreiningar

Líkan tvíhliða dreifigreiningar er svipað einhliða dreifigreiningu. Við gerum ráð fyrir að mæligildi hvers staks ráðist af meðaltali hópsins og fráviki frá þessu meðaltali (villunni). Hér miðast meðaltal hópsins við krossun frumbreytanna og því hefur það tvö niðurskrifuð auðkenni.

Villan hefur sömu eiginleika og áður þ.e. normaldreifingu með meðaltalið 0,0, eitt staðalfrávik óháð hólfum líkansins og engin tengsl milli einstakra niðurstaðna (óháð villa).

$$x_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$
$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma)$$

# Mat á líkaninu

Þýðismeðaltölin eru metin með samsvarandi úrtaksmeðaltölum.

Villan er metin með leifinni, þ.e. frávikinu frá úrtaksmeðaltali hópsins.

Við getum skoðað leifina til að meta eiginleika villunnar. Ef dreifing leifarinnar svipar til normaldreifingar, engin áberandi fráviksgildi eru til staðar og staðalfrávikin eru svipuð í öllum hólfum sniðsins, getum við gert ráð fyrir því að forsendur tvíhliða dreifigreiningar séu fyrir hendi.

$$x_{ijk} = \hat{\mu}_{ij} + e_{ijk}$$

$$e_{ijk} = x_{ijk} - \hat{\mu}_{ij}$$

$$\hat{\mu}_{ij} = \bar{x}_{ij} = \frac{1}{n_{ij}} \sum_k x_{ijk}$$



# Meginhrif og samvirkni

Meðaltal hvers hóls má sundurliða í fjóra áhrifaþætti.

Venjulega skiptum við okkur ekki af heildarmeðaltalinu heldur vinnum með frávikid frá því:  $\mu_{ij} - \mu_t$ .

Meðaltali hóps er deilt niður í heildarmeðaltalið, meginhrif fyrir frumbreyturnar tvær og samvirknihrif þeirra.

Tvíhliða dreifigreining byggist á því að ákvarða framlag hverra hrifa fyrir sig til hópmeðtalanna.

$$\mu_{ij} = \mu_t + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$$

$$\mu_{ij} - \mu_t = \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$$

# Mat á samvirkni

Breytileiki vegna samvirkni er metinn á sama hátt og meginhrif. Við fáum summu kvaðrata og getum reiknað meðalsummu kvaðrata og  $F$ -próf.

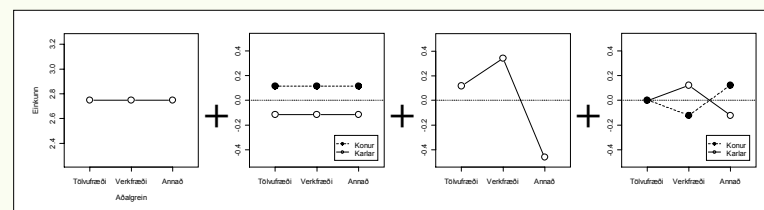
$F$ -prófið prófar þá núlltilgátu að öll samvirknihrifin séu núll í þýði. Það samsvarar því að hópmeðaltölin ráðist fullkomlega af meginhrifunum í þýði.

Ef  $F$ -prófið er marktækt, getum við gert ráð fyrir að meginhrifin dugi ekki til að lýsa hópmeðaltölunum heldur bætist samvirknihrif við hvert þeirra.

Hrif	Summa kvaðrata	df	Meðalsumma kvaðrata	F	p
Kynferði	3,1	1	3,11	7,3	0,007
Aðalgrein	26,8	2	13,38	31,4	0,000
Kynferði * Aðalgrein	2,4	2	1,18	2,8	0,065
Leif	97,1	228	0,43		
Heild	129,3	233			

Aðalgrein	Kynferði	
	Karlar	Konur
Tölvufræði	$2,74 - 0,12 + 0,12 - 0,00 = 2,7$	$2,74 + 0,12 + 0,12 + 0,00 = 3,0$
Verkfræði	$2,74 - 0,12 + 0,34 + 0,12 = 3,1$	$2,74 + 0,12 + 0,34 - 0,12 = 3,1$
Annað	$2,74 - 0,12 - 0,46 - 0,12 = 2,0$	$2,74 + 0,12 - 0,46 + 0,12 = 2,5$

$\mu_{ij} = \mu_t + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$



# Sundurliðun dreifingar

Við getum sundurliðað meðaltölin niður í meginhrif og samvirknihrif. Sama gildir því um dreifinguna.

Heildardreifingin skiptist í tvenn meginhrif, samvirknihrif og leif. Summa kvaðrata skiptist samsvarandi og frígráður deilast niður á sama hátt.

Taktu eftir því að summa kvaðrata fyrir leifina er minni en þegar aðeins voru meginhrif, sbr. [Lægra mat á villunni](#). Metið staðalfrávik er þó svipað og áður þar sem frígráðum leifar hefur fækkað einnig.

Hrif	Summa kvaðrata	df	Meðalsumma kvaðrata	F	p
Kynferði	3,1	1	3,11	7,3	0,007
Aðalgrein	26,8	2	13,38	31,4	0,000
Kynferði * Aðalgrein	2,4	2	1,18	2,8	0,065
Leif	97,1	228	0,43		
Heild	129,3	233			

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E$$
$$df_T = df_A + df_B + df_{AB} + df_E$$

Þessi niðurdeiling breytileikans gildir þegar jafn fjöldi er í öllum hólfum. Þegar ójafnt er í hólfum sniðsins, leggst breytileika hrifa *ekki* saman í heildarbreytileikann.

# Lýsandi tölfraði

Hér virðist allt með felldu.

Það eru engin brottfallsgildi, þar sem allir 234 þátttakendur eru með í töflunni.

Það er jafnt í öllum hólfum.

Meðaltölin eru öll eðlileg innan 0–4 markanna.

Lægsta staðalfrávikin er 0,51 en það hæsta 0,77. Hlutfallið hæsta og lægsta er  $0,77/0,51 \approx 1,5$  eða vel innan marka.

Há meðaltöl eru með lág staðalfrávik og lág meðaltöl með há staðalfrávik.

Report				
Meðaleinkunn í háskóla eftir þrjú misseri				
Kynferði	Aðalgrein eftir 3 misseri	Mean	N	Std. Deviation
Karlur	Tölvufræði	2,7474	39	,68399
	Verkfræði eða önnur raunvísindi	3,0964	39	,51297
	Annað	2,0477	39	,73041
	Total	2,6305	117	,77846
Konur	Tölvufræði	2,9792	39	,53347
	Verkfræði eða önnur raunvísindi	3,0808	39	,64813
	Annað	2,5236	39	,76556
	Total	2,8612	117	,69430
Total	Tölvufræði	2,8633	78	,62043
	Verkfræði eða önnur raunvísindi	3,0886	78	,58072
	Annað	2,2856	78	,78094
	Total	2,7459	234	,74502

Lægsta staðalfrávikin

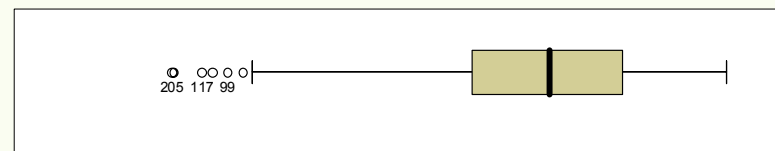
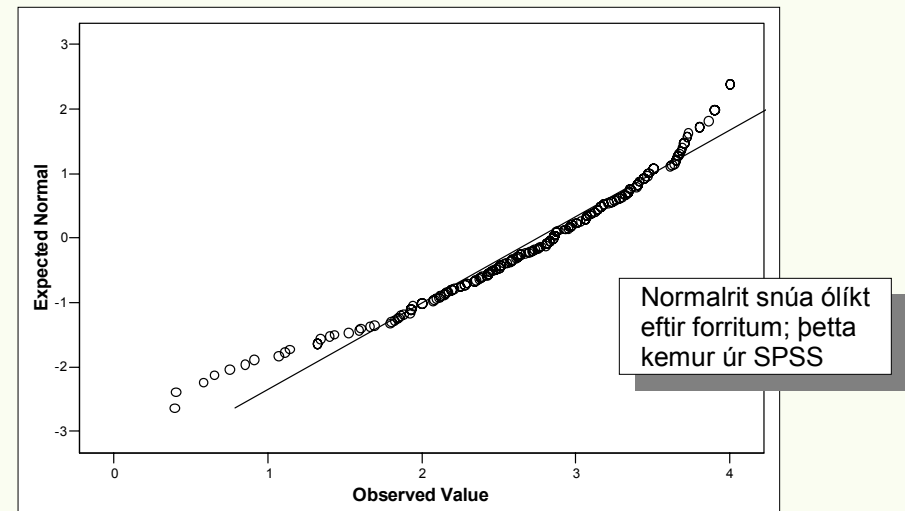
Hæsta staðalfrávikin

# Skoðun á fylgibreytu

Fylgibreytan fyllir vel upp í 0 til 4 kvarðann. Dreifingin er mjög nálægt normaldreifingu en með langan neðri hala. Það vottar einnig fyrir rjáfurhrifum.

Fráviksgildin í neðri halanum verður til þess að við viljum vera á varðbergi gagnvart frávillingum.

Breytan er takmörkuð, tekur ekki gildi lægri en 0,0 né hærra en 4,0. Því er takmarkaðir möguleikar á frávillingum.

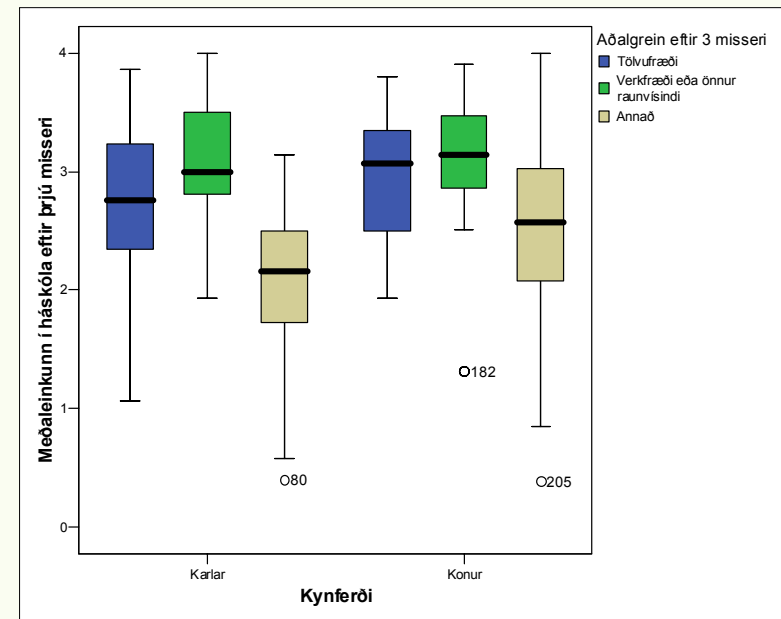


# Misleitni

Krossað kassarit styður það sem við töldum okkur sjá þegar fylgibreytan var skoðuð.

Það er lítil misleitni en því neðar sem kassarnir eru á myndinni því stærri eru þeir. Neðri skeggin eru almennt mun lengri en þau efri, hugsanlega vísbending um rjáfurhrif.

Nokkur fráviksgildi en mest hjá konum í verkfræði. Þar er neðri halinn einnig mjög stuttur. Myndræn athugun á leif myndi sýna þetta betur.



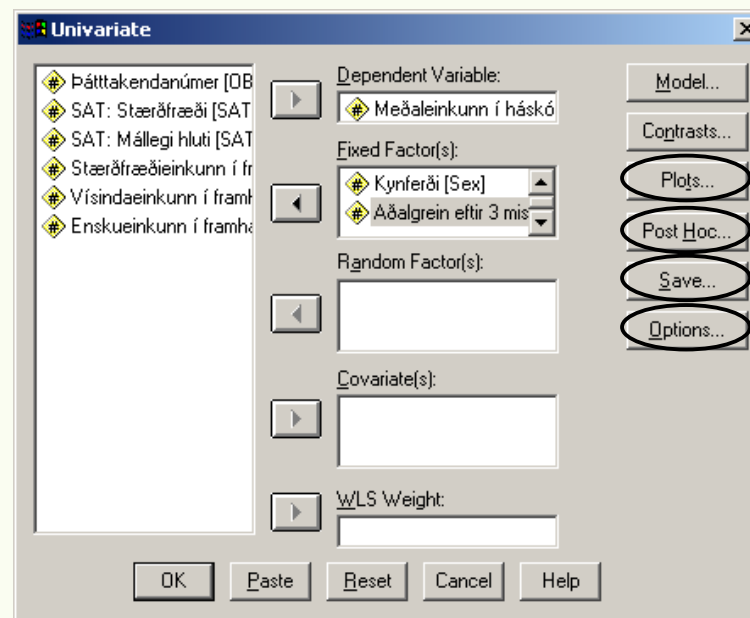
# Framkvæmd úrvinnslunnar

Úrvinnslan er framkvæmd svipað og í einhliða dreifigreiningu.

Við förum í **Analyze/General Linear Model/Univariate** og setjum fylgibreytuna í efsta textareitinn og frumbreyturnar báðar í þann næsta.

Við notum merktu takkana til að biðja um viðbótarúrvinnslu svipað og þegar við gerðum einhliða dreifigreiningu.

Að lokum ýtum við á **OK** til að byrja úrvinnsluna eða **Paste** til að fá skipunina yfir í skipanagluggann.

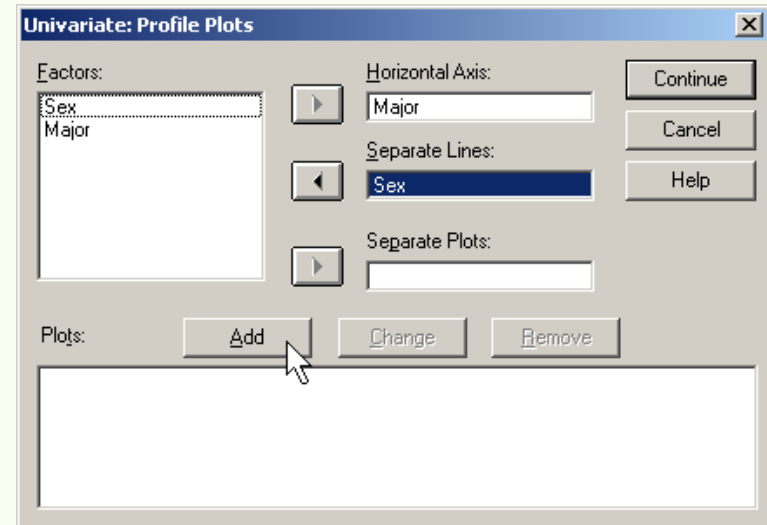


# Beðið um línurit meðaltala

Við notum sams konar stillingar og fyrir einhliða dreifigreiningu.

Auk þess förum við í **Plots**, setjum aðra frumbreytuna í efri textareitinn og hina í þann neðri og smellum svo á **Add**.

Að síðustu smellum við á **Continue** til að fá hefðbundið samvirknirit fyrir tvíhliða dreifigreiningu



Ofast hentar betur að láta þá breytu sem tekur færri gildi skilgreina línur. Það er þó gagnlegt að prófa báða möguleika.



# Próf Levenes

Próf Levenes er ómarktækt.

Áður vorum við búin að sjá að hæsta úrtaksstaðalfrávik var 1,5 af því lægsta og því ekki vísbending um alvarlega misleitni.

Krossaða kassaritið gaf til kynna að dreifingin ykist eftir því sem meðaltöl væru lægri, sama sýnir myndin.

Það er því væg vísbending um misleitni væntanlega tengt skekkju í villudreifingu en sennilega engin stór frávik.

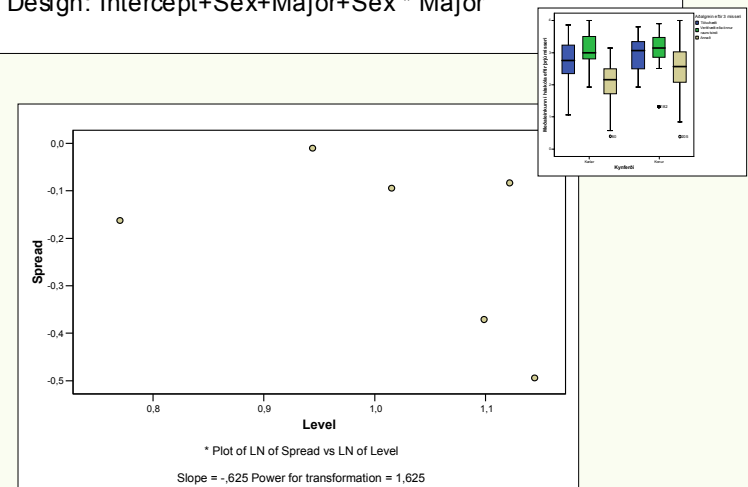
## Levene's Test of Equality of Error Variances<sup>a</sup>

Dependent Variable: Meðaleinkunn í háskóla eftir þrjú misse

F	df1	df2	Sig.
1,366	5	228	,238

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

a. Design: Intercept+Sex+Major+Sex \* Major



# Dreifigreiningartaflan

Hér fáum við flóknu og ruglingslegu dreifigreiningartöflu SPSS.

Við getum fullyrt að einkunn sé ólík eftir kyni og einnig ólík eftir aðalgrein.

Við vorum búin að sjá að mynstur meðaltala yfir aðalgreinar var annað fyrir karla heldur en konur. Þessar niðurstöður koma í veg fyrir að við getum fullyrt að svo sé í þýði. Hins vegar væri varhugavert að fullyrða blákalt að engin samvirkni sé í þýði.

Tests of Between-Subjects Effects					
Dependent Variable: Meðaleinkunn í háskóla eftir þrjú misseri					
Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	32,228 <sup>a</sup>	5	6,446	15,135	,000
Intercept	1764,294	1	1764,294	4142,790	,000
Sex	3,113	1	3,113	7,310	,007
Major	26,759	2	13,380	31,417	,000
Sex * Major	2,356	2	1,178	2,766	,065
Error	97,099	228	,426		
Total	1893,620	234			
Corrected Total	129,326	233			

a. R Squared = ,249 (Adjusted R Squared = ,233)

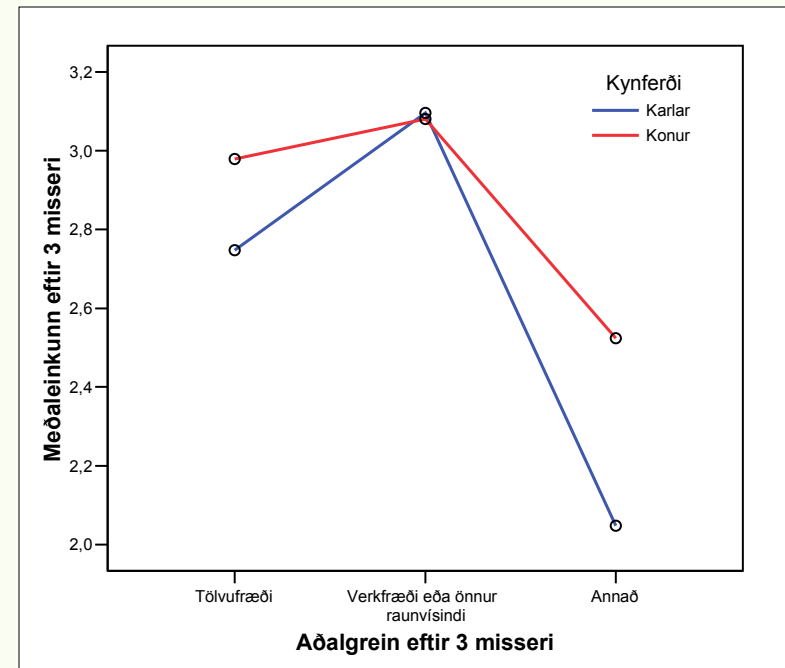
# Línurit yfir meðaltöl

Þessa mynd sýndi ég ykkur áður en hér er hún til að hjálpa við túlkun niðurstaðna.

Við sjáum að konur eru með hærri einkunnir að jafnaði heldur en karlar.

Einkunnir eru hæstar í tölvufræði og verkfræði en lægstar í öðrum greinum.

Samvirknin bendir til að yfirburðir kvenna séu ekki fyrir hendi í verkfræði. Við getum þó ekkert fullyrt því hrifin ná ekki marktekt.



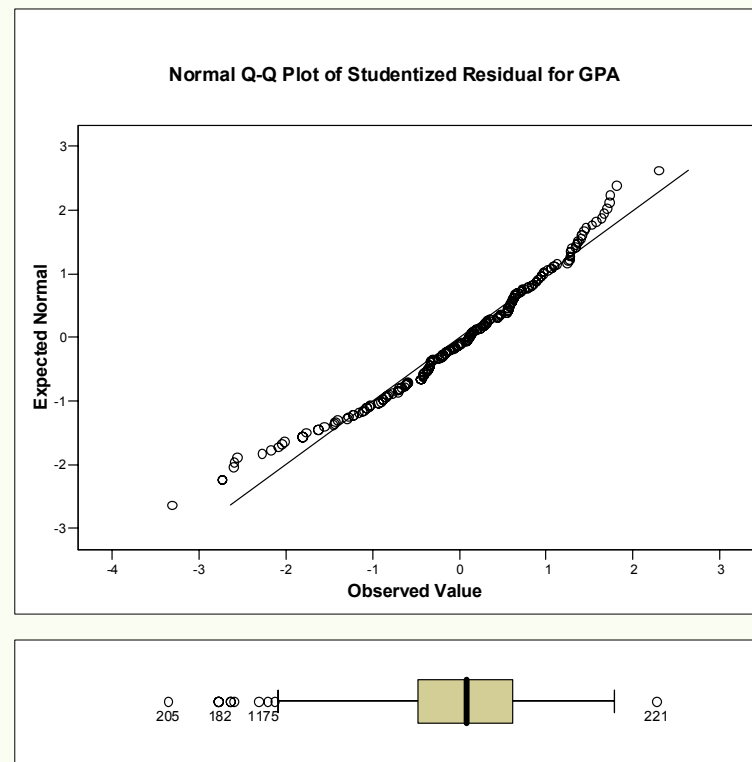
# Athugun á leif

Athugun á leifinni styður það sem við töldum okkur áður vita.

Það er lítils háttar neikvæð skekkja með tilhneigingu til fráviksgilda. Villan er því hugsanlega ekki fyllilega normaldreifð.

Frávik frá normaldreifingu eru þó ekki stórvægileg. Það væri helst ef fráviksgildi yllu erfiðleikum.

Hugsanlega þurfum við ekkert að gera en til álita kæmi að umbreyta gögnunum.



# Fyrirfram samanburðir

Við höfum engar fyrirfram tilgátur og því er ekki réttmætt að prófa samanburði án leiðréttingar.

Til gamans sýni ég þó óleiðréttan samanburð raungreina á mótí öðrum greinum.

Samkvæmt honum eru einkunnir 0,7 hærri í raungreinum en öðrum.

Samanburður þeirra við aðrar greinar skýra yfir 90% af þeim breytileika sem tilheyrir meginhrifum Aðalgreinar.

## UNIANOVA

GPA BY Sex Major

/Contrast(Major)= SPECIAL (0.5 0.5 -1) .

Contrast Results (K Matrix)			
			Dependent Variable
			Meðaleinkunn í háskóla eftir þrjú misseri
Aðalgrein eftir 3 misseri Special Contrast	Contrast Estimate		,690
L1	Hypothesized Value		0
	Difference (Estimate - Hypothesized)		,690
	Std. Error		,090
	Sig.		,000
	95% Confidence Interval for Difference	Lower Bound	,512
		Upper Bound	,869

Test Results					
Dependent Variable: Meðaleinkunn í háskóla eftir þrjú misseri					
Source	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Contrast	24,780	1	24,780	58,187	,000
Error	97,099	228	,426		

# Samanburðir með aðferð Bonferroni

Eftir á samanburði getum við gert með aðferð Bonferronis.

Niðurstaða paraðra samanburða er í samræmi við það sem við höfum þegar komist að.

Við getum fullyrt að það séu hærrí einkunnir hjá þeim sem eru áfram í Tölvunarfræði en þeim sem hafa skipt yfir í aðrar greinar. Við getum einnig fullyrt að einkunnir séu hærrí hjá þeim sem hafa skipt yfir í verkfræði heldur en þeim sem fóru í annað.

Multiple Comparisons						
Dependent Variable: Meðaleinkunn í háskóla eftir þrjú misseri						
Bonferroni						
(I) Aðalgrein eftir 3 misseri	(J) Aðalgrein eftir 3 misseri	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
Tölvufræði	Verkfræði eða önnur raunvísindi	-.2253	,10450	,096	-.4773	,0268
	Annað	,5777*	,10450	,000	,3257	,8297
Verkfræði eða önnur raunvísindi	Tölvufræði	,2253	,10450	,096	-.0268	,4773
	Annað	,8029*	,10450	,000	,5509	1,0550
Annað	Tölvufræði	-.5777*	,10450	,000	-.8297	-.3257
	Verkfræði eða önnur raunvísindi	-.8029*	,10450	,000	-1,0550	-.5509

Based on observed means.  
\*. The mean difference is significant at the ,050 level.

Aðalgrein	Meðaltal	Staðalfrávik	Fjöldi
Tölvunarfræði	2,9 <sub>a</sub>	0,62	39
Verkfræði	3,1 <sub>a</sub>	0,58	39
Annað	2,3 <sub>b</sub>	0,78	39
Heild	2,7	0,75	117

Meðaltöl með ólíka niðurskrifaða bókstafi eru ólík samkvæmt aðferð Bonferronis.

# Samanburðir með Scheffé

Scheffé gerir okkur kleift að gera hvaða samanburð sem er, ekki endilega paraðan.

Við þurfum að taka niðurstöðuna og deila í  $F$ -ið með frígráðunum. Aðalgrein hefur tvær frígráður.

Fyrir fyrri samanburðinn fáum við því  $F(1, 228) = 58,187/2 = 29,1$ ,  $p < 0,001$ . Sá seinni gefur  $F(1, 228) = 4,647/2 = 2,3$ ,  $p > 0,10$ . Fyrri samanburðurinn skiptir langmestu máli en við getum ekki útilokað áhrif hins í þýði.

UNIANOVA  
GPA BY Sex Major  
/Contrast(Major)= SPECIAL (0.5 0.5 -1)  
/Contrast(Major)= SPECIAL (1 -1 0).

Test Results					
Dependent Variable: Meðaleinkunn í háskóla eftir þrjú misseri					
Source	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Contrast	24,780	1	24,780	58,187	,000
Error	97,099	228	,426		

Test Results					
Dependent Variable: Meðaleinkunn í háskóla eftir þrjú misseri					
Source	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Contrast	1,979	1	1,979	4,647	,032
Error	97,099	228	,426		