

Einhliða dreifgreining

Fyrirlestur í Tölfræði III (SÁL308G)

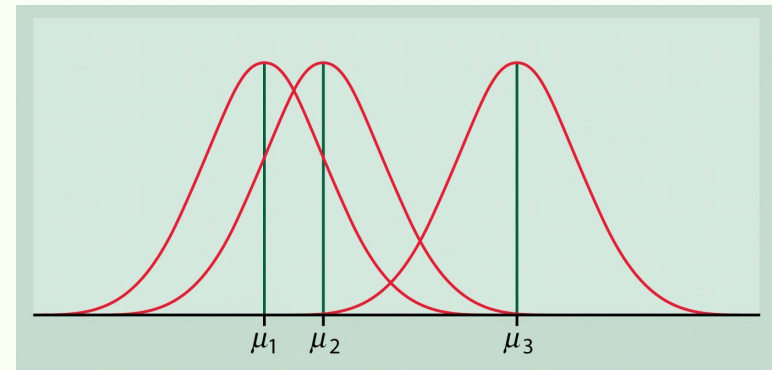
Einhliða dreifigreining

Einhliða dreifigreining miðast við að athuga hvort og þá hvaða munur sé á tveimur eða fleiri hópum í þýði.

Hún byggist á líkani þar sem hver hópur hefur sitt meðaltal í þýði og meðlimir hópsins dreifast í kringum hópmeðaltalið.

Hver meðlimur víkur frá meðaltali hópsins. Þessi frávik normaldreifast í kringum hópmeðaltalið.

Ef hóparnir eru aðeins tveir, má nota t -próf í stað dreifigreiningar.



$$x_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$
$$\varepsilon \sim N(0, \sigma)$$

Mat á líkaninu

Við höfum aðeins upplýsingar um úrtakið og vitum því ekki hverjar þýðistölurnar eru.

Við *metum* þýðistölurnar með því að nota samsvarandi úrtakstölur.

Meðaltölin í úrtakinu gefa okkur spá um þýðismeðaltölin og leifin fyrir hvern þátttakanda gefur okkur mat á stærð villunnar.

Spágildi hópmeðaltalanna eru jöfn úrtaksmeðaltölunum.

$$\begin{aligned}x_{ij} &= \hat{\mu} + e_{ij} \\ &= \bar{x}_i + e_{ij}\end{aligned}$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

Mat á staðalfrávik í líkansins

Dreifigreining miðar við að villan hafi sama staðalfrávik í öllum hópum. Staðalfrávik er metið sem samlagt staðalfrávik allra hópanna, s_p .

Við getum reiknað staðalfrávik í höndunum með formúlunni hér til hliðar eða látið tölfraeðiforritið gera það fyrir okkur.

Staðalfrávik sem við reiknum er aðeins mat okkar á σ byggt á staðalfrávikum hópanna í úrtaki.

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2 + \dots + (n_I - 1)s_I^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_I - 1)}$$
$$\hat{\sigma} = s_p = \sqrt{s_p^2}$$

Forsenda dreifigreiningar er sameiginlegt staðalfrávik í þýði. Í úrtaki eru staðalfrávik hópanna aldrei nákvæmlega eins og geta verið töluvert ólík þótt þýðisstaðalfrávik sé aðeins eitt.

Ef staðalfrávik hópanna eru mjög ólík, þarf að fara varlega. Miða má við að ef stærsta úrtaksstaðalfrávik er ekki orðið tvöfalt stærra en lægsta staðalfrávik, sé alveg ástæðulaust að hafa áhyggjur.

Allsherjarpróf dreifigreiningar

Í dreifigreiningu er allsherjarpróf (*omnibus test*) sem prófar núlltilgátu sem segir að þýðismeðaltöl allra hópa séu eins.

Ef við höfnum núlltilgátunni, þýðir það að við teljum að eitt eða fleiri meðaltöl séu ólík hinum.

Við vitum hins vegar ekki hvaða meðaltöl eru eins og hver þeirra eru innbyrðis ólík.

Allsherjarprófið er jafnan forsenda þess að túlka meðaltölin nánar.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_I$$

H_1 : Eitt eða fleiri meðaltöl eru ólík hinum

Ef við getum ekki hrakið þessa almennu núlltilgátu, getum við auðvitað eftir sem áður túlkað öryggisbil til að meta sennileg gildi þýðismeðaltala eða mismun þeirra.

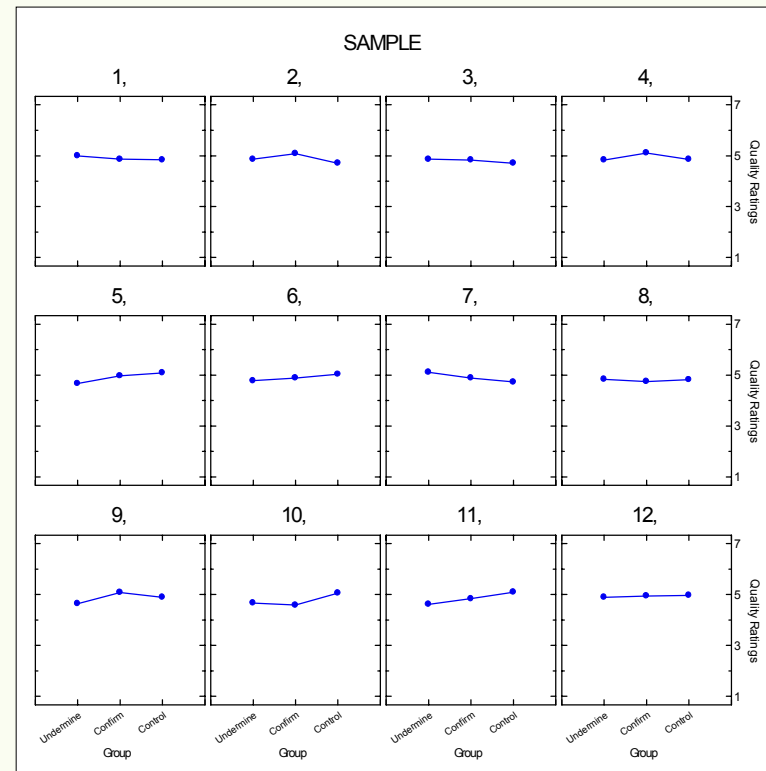
Ef núlltilgátan er óhrakin—allsherjarprófið ómarktækt—getum við ekki staðhæft að eitt eða fleiri meðaltal sé ólíkt hinum í þýði.

Úrtakadreifing dreifigreiningar

Ef allsherjarnúlltilgátan er rétt, eru öll þýðismeðaltölin eins. Í úrtaki verða hins vegar mismikil frávik frá þýðinu.

Myndin sýnir 12 úrtök dregin úr þýði þar sem öll meðaltölin eru 5,0. Við sjáum að meðaltölin eru hvergi öll eins, frávikin frá núlltilgátunni eru mismikil og mynstur meðaltalanna eru mjög breytileg.

Skera meðaltöl úrtaksins sig það mikið frá þessum breytileika að okkur sé stætt á því að fullyrða að þau komi úr þýði með innbyrðist ólík meðaltöl?



Forathuganir gagnanna

Fyrsta skrefið er að biðja um einfalda lýsandi tölfræði fyrir allar breytur.

Við erum með 127 stök og ekki brottfall á neinni breytanna.

Þátttakanúmer á bilinu 1 til 127.

Hópauðkenni á bilinu 1 til 3.

Gæðamatseinkunn á bilinu 3 til 7.

Það er athyglisvert að enginn metur gæðin lágt, þ.e. tölurnar 1 og 2 eru ekki notaðar. Meðaltalið er hátt (4,9).

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
Þátttakanúmer	127	1,00	127,00	64,0000	,3680580
Hópur	127	1,00	3,00	1,8504	,83646
Gæðamat á vöru	127	3,00	7,00	4,9213	,86928
Valid N (listwise)	127				

Almennt er talið að auglýsing auki trú á gæði þess auglýsta. Þátttakendur lásu auglýsingu með upplýsingum sem ýmist drógu úr (*undermine*), staðfestu (*affirm*) eða voru hlutlaus gagnvart tengslum auglýsinga við vörugæði. Þátttakendur mátu síðan hver sennileg gæði vörunnar væru á kvarðanum 1–7.

[http://www.jstor.org/stable/2489515\(&](http://www.jstor.org/stable/2489515(&)

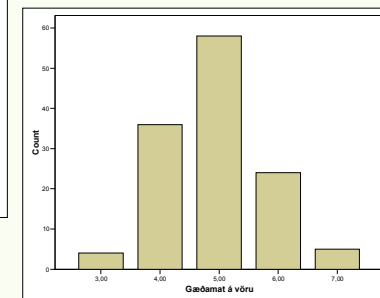
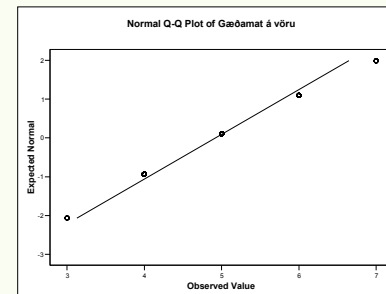
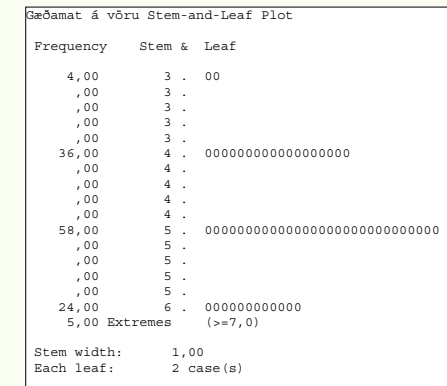
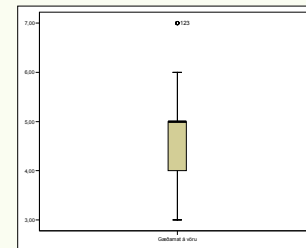
Skoðun fylgibreytunnar

Við fáum ólíkar upplýsingar eftir því hvaða myndrit við notum.

Laufritið sýnir vel að þetta er rofin breyta og sama sést á normalritinu.

Kassaritið virkar illa á svona rofnar breytur. Það sýnir hæstu gildin ranglega sem fráviksgildi.

Þetta er takmörkuð (*bounded*), rofin breyta sem tekur aðeins fimm mismunandi gildi. Það þýðir að fráviksgildi verða ekki vandamál.



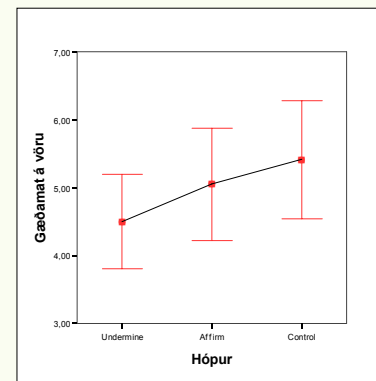
Lýsandi tölfræði

Taflan sýnir að það er ójafnt í hópum, þ.e. mun fleiri í „Undermine“ heldur en í hinum hópunum tveimur.

Staðalfrávikin eru öll svipuð og það hæsta er aðeins 26% hærra en það lægsta.

Það er umtalsverður munur á meðaltölum hópanna. Myndin sýnir að það er hæst í samanburðarhópnum og lægst í „Undermine“ hópnum.

Report			
Gæðamat á vöru			
Hópur	Mean	N	Std. Deviation
Undermine	4,5	55	,69
Affirm	5,1	36	,83
Control	5,4	36	,87
Total	4,9	127	,87



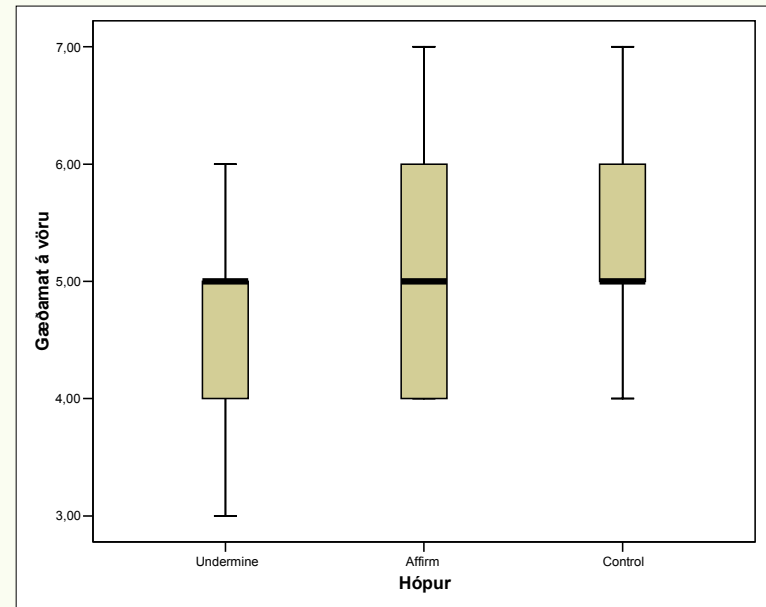
Meðaltöl með staðalfrávikum en algengara er að birta 95% öryggisbil.

Misleitni

Það er erfitt að meta misleitni í þessum gögnum sökum þess að fylgibreytan er rofin og tekur tiltölulega fá gildi.

Kassaritið endurspeglar þetta. Þar sem endar kassana, miðlínan og skeggin geta aðeins fallið á heilar tölur—einu gildin í úrtakinu—gefur myndin ekki glögga mynd af dreifingunni.

Þar sem staðalfrávikin voru öll svipuð er trúlegt að eitt staðalfrávik gæti legið að baki gögnunum.



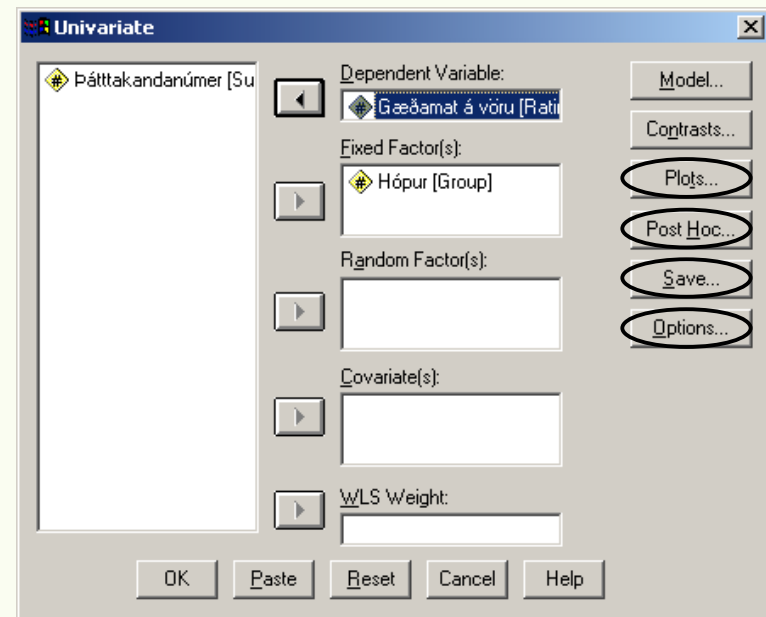
Framkvæmd dreifigreiningar

Við förum í Analyze/General Linear Model/Univariate og þá sprettur fram þessi valgluggi.

Fylgibreytan fer í **Dependent Variable** og frumbreytan í **Fixed Factors**.

Síðan er smellt á OK og úrvinnslan fer í gang.

Ýmsir aðrir valkostir eru í þessum valglugga sem við förum í síðar.

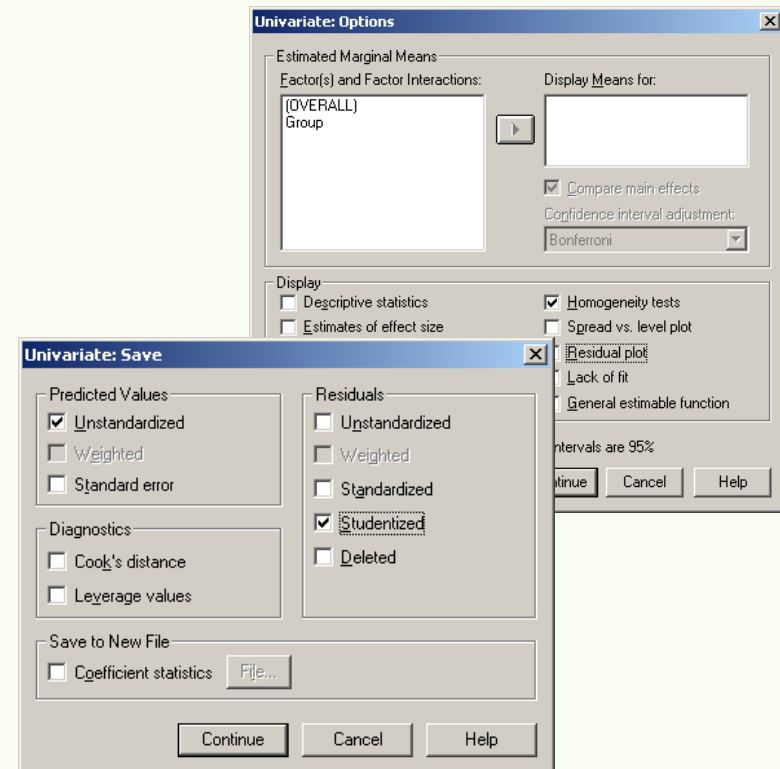


Nánari stillingar

Við smellum strax á Options-takkann og Save-takkann.

Undir Options er rétt að haka við Homogeneity tests til að fá Próf Levenes. Athugið að Moore og McCabe mæla ekki með notkun þessa prófs.

Undir Save er hakað við óstaðlað spágildi og Studentized leif.



Próf Levenes

Fyrst fáum við yfirlit yfir hópa og fjölda. Við tékkum á tölunum til að ganga úr skugga um að allt sé með felldu.

Síðan kemur Próf Levenes sem prófar núlltilgátuna að dreifitölurnar séu eins í öllum hópum. Prófið er ómarktækt og því ekki hægt staðfesta misleitni.

Þessa niðurstöðu er rétt að skoða með hliðsjón af kassaritum og hlutfalli hæsta og lægsta staðalfráviks. Hér leiðir allt að þeirri niðurstöðu að umtalsverð misleitni sé ekki til staðar.

Between-Subjects Factors

	Value	Label	N
Hópur	1,00	Undermine	55
	2,00	Affirm	36
	3,00	Control	36

Levene's Test of Equality of Error Variances^a

Dependent Variable: Gæðamat á vöru

F	df1	df2	Sig.
1,140	2	124	,323

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

a. Design: Intercept+Group

Dreifigreiningartaflan

Dreifigreiningartaflan í SPSS er óþarflega flókin. Ég mæli með því að strika út efstu tvær línurnar.

Við túlkum F -prófið eins og áður. Frumbreytan Group er marktæk og því getum við fullyrt að meðaltöl hópanna séu ekki öll eins í þýði. Við getum ekki fullyrt hver þeirra séu ólík heldur aðeins að þau séu ekki öll eins.

Línan fyrir Intercept prófar hvort fastinn sé núll (0,0) í þýði. Við höfum sjaldnast áhuga á því og línunni því ofaukið í töflunni.

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	18,828(a)	2	9,414	15,283	,000
Intercept	3043,772	1	3043,772	4941,166	,000
Group	18,828	2	9,414	15,283	,000
Error	76,384	124	,616		
Total	3174,000	127			
Corrected Total	95,213	126			

Eftirfarandi eru línurnar sem þarf að lesa.

Group: Frumbreytan okkar. F -prófið prófar hvort okkur sé stætt á því að hafna núlltilgátunni.

Error: Mat okkar á villudreifingunni. Ef við tökum kvaðratrót af MS_{Error} fáum við mat á sameiginlegu staðalfráviki í þýði.

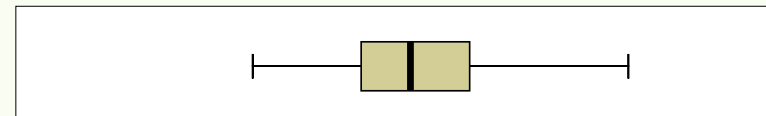
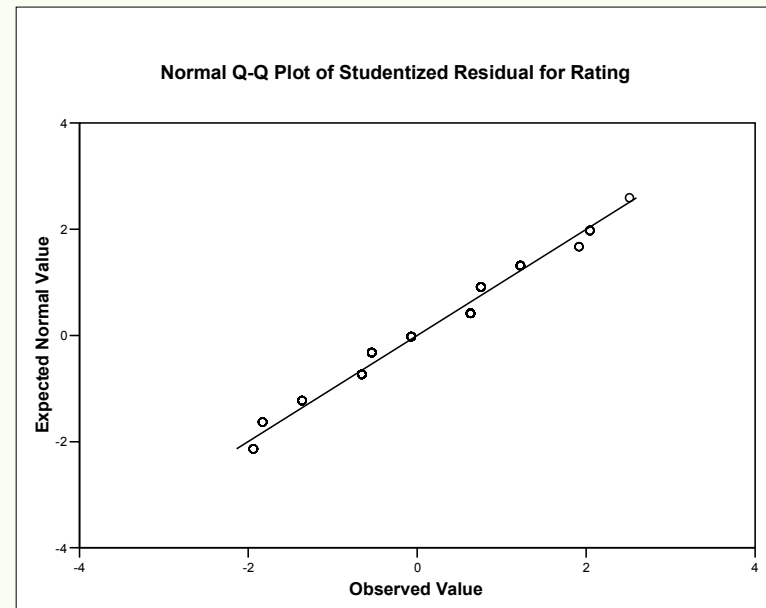
Corrected total: Heildardreifing líkansins.

Athugun á leif

Leifin ætti að birtast sem breyta í gagnaglugganum sem byrjar á SRE, t.d. SRE_1. Við biðjum um bæði normalrit og kassarit af henni.

Í báðum tilvikum virðist allt með felldu. Leifin fellur vel að beinu línunni í normalritinu. Í kassaritinu vottar fyrir jákvæðri skekkju en ekkert sem skiptir máli.

Við höfum því ástæðu til að ætla að forsendan um normaldreifingu villunnar sé vel uppfyllt.

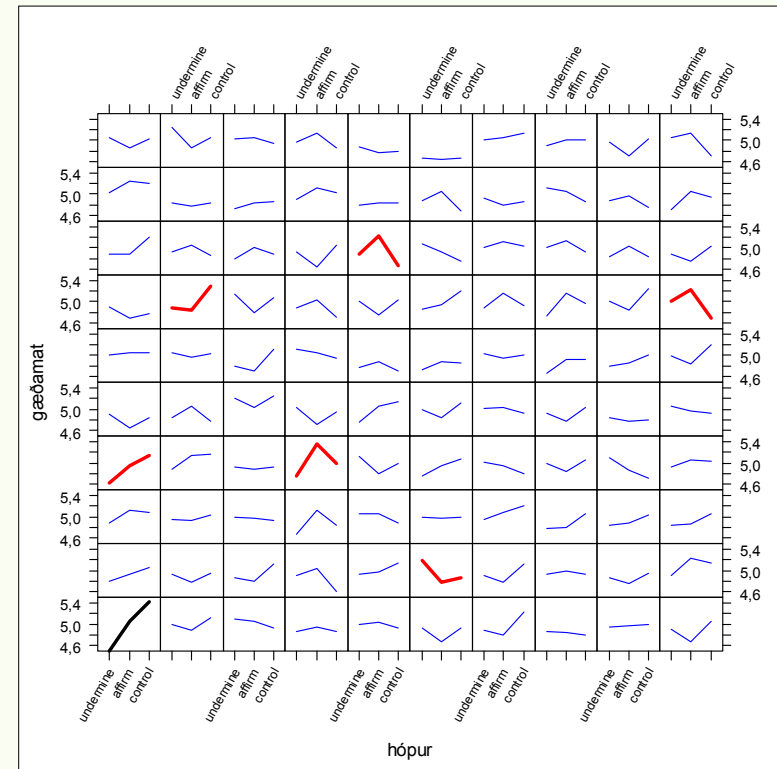


Hermun (*simulation*)

Marktekt segir okkur að niðurstaðan sé ólíkleg ef núlltilgátan er sönn.

Hér sýni ég 99 úrtök úr þýði þar sem H_0 er rétt. Fyrsti reiturinn (svört lína) sýnir okkar niðurstöður, hinir eru með rauða línu ef niðurstaðan er marktæk en annars bláa.

Við ættum von á láréttri línu en vegna úrtakadreifingar eru alltaf einhver frávik frá H_0 . Við sjáum að niðurstaðan sker sig úr dreifingunni undir núlltilgátunni, svarta línan er jafnvel ýktari en rauðu línurnar!



Mynstur meðaltala

Allsherjarprófið í dreifigreiningu segir ekkert um mynstur meðaltala, þ.e. hver þeirra séu ólík og hver eins.

Við getum prófað þetta mynstur á tvo vegu: (a) Prófað tiltekna tilgátur sem við setjum fram áður en gögnum er safnað (fyrirfram tilgátur; *a priori*) og (b) skoðað mynstur meðaltala eftir úrvinnslu og leitað að meðaltalsmuni sem getur skýrt niðurstöður (eftir á samanburðir; *post hoc*).

Gera verður skýran greinarmun á fyrirfram og eftir á samanburðum.

Með fyrirfram samanburðum prófum við tiltekna fáar spurningar sem hafa fræðilegt gildi. Spurningarnar eru settar fram áður en rannsókn er gerð.

Eftir á samanburðir prófa hugmyndir sem vakna þegar mynstur meðaltala er skoðað. Við látum því gögnin leiða okkur áfram og skoðum hugmyndir sem vakna við það.

Fyrirfram samanburðir

Það þarf að gæta að röð meðaltalanna, sama röð og birtist í SPSS.

Við getum gert ráð fyrir að auglýsing með upplýsingum sem staðfesta gæði vöru skili betri árangri en sú sem grefur undan tiltrú á henni. Ef þessi hugmynd vaknar áður en rannsókn er gerð, getum við svarað henni með fyrirfram samanburði.

Fyrirfram samanburði verðum við að gera með skipunum. Það er einnig auðvelt að reikna þetta í höndunum samanber leiðbeiningar í kennslubók.

```
UNIANOVA
Rating BY Group
/CONTRAST (Group)= SPECIAL( -1 1 0)
/DESIGN = Group .
```

Við þurfum að hafa /CONTRAST skipunina nákvæmlega eins og þarna nema stuðlarnir breytast eftir því hver samanburðurinn er.

Jafnan hér fyrir neðan sýnir samanburðurinn sem metinn er.

$$\psi_1 = -1 \cdot \mu_{Undermine} + 1 \cdot \mu_{Affirm} + 0 \cdot \mu_{Control}$$

$$c_1 = -\bar{x}_{Undermine} + \bar{x}_{Affirm} + 0 \cdot \bar{x}_{Control}$$

Mat á fyrirfram samanburði

Niðurstaða samanburðarins er 0,546 sem samsvarar mismuni meðaltalanna í úrtakinu. Öryggisbilið segir okkur að sennilegur mismunur sé á bilinu 0,2 til 0,9 miðað við 95% öryggi.

Marktektarprófið gefur til kynna marktekt þannig að okkur er stætt á því að fullyrða að um raunverulegan mun á meðaltölum sé að ræða.

Þessi fyrirfram samanburður er gildur hvort sem F -próf dreifigreiningar er marktækt eða ómarktækt.

Contrast Results (K Matrix)		
		Dependent Variable
Hópur	Special Contrast	Gæðamat á vöru
L1	Contrast Estimate	,546
	Hypothesized Value	0
	Difference (Estimate - Hypothesized)	,546
	Std. Error	,168
	Sig.	,001
	95% Confidence Interval for Difference	
	Lower Bound	,213
	Upper Bound	,879

Test Results					
Dependent Variable: Gæðamat á vöru					
Source	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Contrast	6,498	1	6,498	10,548	,001
Error	76,384	124	,616		

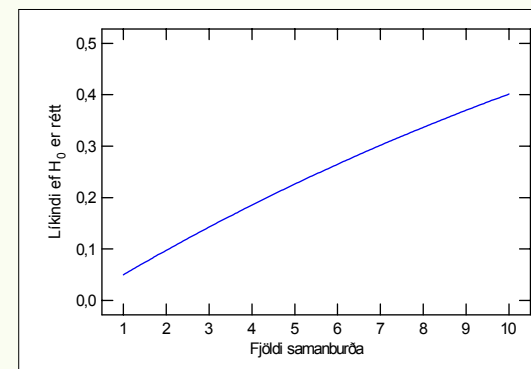
Vandi eftir á samanburða

F -próf dreifigreiningar miðað við $\alpha=0,05$ tryggir það að *ef* núlltilgátan er rétt höfnum við henni aðeins í 5% tilvika.

Í eftir á samanburðum getum við gert marga samanburði. Ef hver þeirra er gerður við $\alpha=0,05$ eru 5% líkur á að hafna viðkomandi núlltilgátu *ef* hún er rétt. En þar sem samanburðirnir eru margir eru meiri en 5% líkur á því að *einn eða fleiri* verði marktækir ef almenna núlltilgátan er rétt.

Ef við framkvæmum tvo samanburði við $\alpha=0,05$ eru allt að 9,8% líkur á því að annar eða báðir séu marktækir þótt almenna núlltilgátan sé rétt. Taflan hér fyrir neðan gefur upp líkur á marktækt eftir fjölda samanburða.

Fjöldi	Líkindi
1	0,050
2	0,098
3	0,143
4	0,185
5	0,226
6	0,265
7	0,302
8	0,337
9	0,370
10	0,401

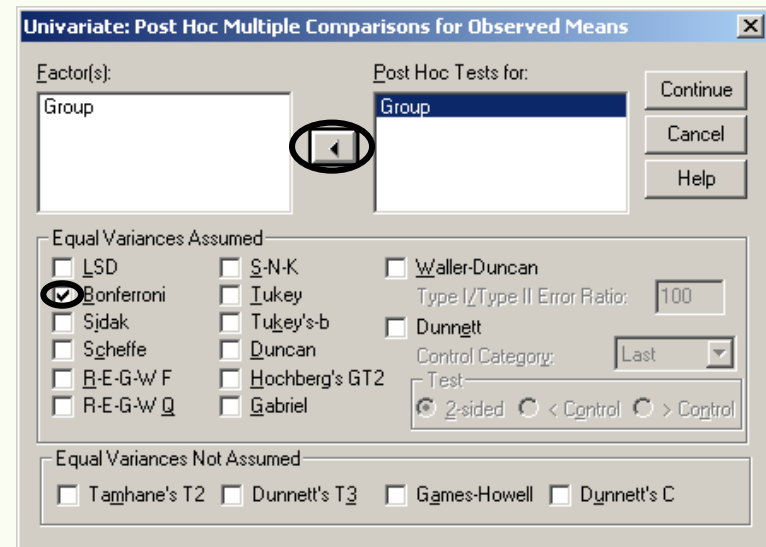


Aðferð Bonferronis

Til að fá eftir á próf með aðferð Bonferronis smellum við á takkann sem er merktur Post Hoc í valglugga dreifigreiningarinnar.

Þá sprettur fram nýr valgluggi og þar færum við frumbreytuna yfir í hægri gluggann. Síðan setjum við hak við Bonferroni fyrir miðju vinstra megin í valglugganum.

Að síðustu smellum við á Continue til að halda áfram.



Samanburðir með Bonferroni

Með aðferð Bonferronis getum við ályktað að þeir sem sáu auglýsingu sem gróf undan tiltrú á gæðum vöru meti gæðin lægri heldur en þeir sem sáu auglýsingu sem staðfestu gæðin eða voru í samanburðarhópi.

Við getum því ekki fullyrt að það að staðfesta gæði vöru auki gæðamatið umfram samanburðarhópinn. Ef öryggisbilið er skoðað sést þó að það er óvarlegt að slá því föstu að skilaboð sem staðfesta gæði hafi engin áhrif.

Multiple Comparisons

Dependent Variable: Gæðamat á vöru
Bonferroni

(I) Hópur	(J) Hópur	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
Undermine	Affirm	-,5465*	,16826	,004	-,9548	-,1381
	Control	-,9076*	,16826	,000	-1,3159	-,4992
Affirm	Undermine	,5465*	,16826	,004	,1381	,9548
	Control	-,3611	,18499	,160	-,8101	,0878
Control	Undermine	,9076*	,16826	,000	,4992	1,3159
	Affirm	,3611	,18499	,160	-,0878	,8101

Based on observed means.
*. The mean difference is significant at the ,050 level.

Hópur	Meðaltal	Staðal- frávik	Fjöldi
Undermine	4,5 _a	0,69	55
Affirm	5,1 _b	0,83	36
Control	5,4 _b	0,87	36
Heild	4,9	0,87	127

Athugasemd. Meðaltöl með ólíka bókstafi eru metin ólík með aðferð Bonferronis ($\alpha = 0,05$).